MASTER OF SCIENCE
IN ENGINEERING

Modulbeschrieb

Vektoren und Tensoren in der Technischen Physik

Allgemeine Informationen

Anzahl ECTS-Credits

3

Modulkürzel

FTP_Tensors

Version

19.02.2015

Modulverantwortliche/r

Christoph Meier, BFH

Sprache

	Lausanne	Bern	Zürich
Unterricht	☐ E ☐ F	☐ D ☐ E ☐ F	☒ D ☒ E
Unterlagen	☐ E ☐ F	☐ D ☐ E ☐ F	☐ D ☒ E
Prüfung	☐ E ☐ F	☐ D ☐ E ☐ F	☒ D ☒ E

Modulkategorie

☒ Grundlegende theoretische Prinzipien
☐ Technisch-wissenschaftliche Vertiefung
☐ Kontextmodul

Lektionen

☒ 2 Vorlesungslektionen und 1 Übungslektion pro Woche
☐ 2 Vorlesungslektionen pro Woche

Kurzbeschreibung /Absicht und Inhalt des Moduls in einigen Sätzen erklären

Der Kurs beginnt mit einer Übersicht über die klassische Technische Physik mit spezieller Betonung auf Bilanz und konstitutiven Gleichungen (d. h. Kontinuitätsgleichungen und Werkstoffgesetze). Die grundlegenden Konzepte der Vektoranalyse werden auf die Elektrodynamik, verschiedene Transportphänomene, mechanische Elastizität und piezoelektrische Effekte angewendet. Das Konzept der Tensore ermöglicht die Beschreibung wichtiger anisotroper Effekte der Festkörperphysik. Diese Effekte treten sowohl in Kristallen als auch in Materialschichtsystemen auf, die zunehmend in der modernen Technologie verwendet werden. Der vermittelte Überblick erleichtert den Studierenden das Verständnis und die Anwendung von numerischen Simulationsmethoden (z. B. FEA, Multiphysik).

Ziele, Inhalt und Methoden

Lernziele, zu erwerbende Kompetenzen

- Die Studierenden kennen die wichtigsten Grundgesetze der Technischen Physik für isotrope Werkstoffe in allgemeiner Sichtweise, erkennen Analogien zwischen verschiedenen Anwendungsgebieten und nutzen diese zur Analyse von Systemen.
- Die Studierenden kennen die Verallgemeinerung der Gesetze für anisotrope Werkstoffe und können diese speziell betreffend der Anwendung in der numerischen Simulation interpretieren.
- Die Studierenden beherrschen die Vektoranalyse und die Algebra der Tensoren zusammen mit Standard-Notationskonventionen.
- Die Studierenden verstehen die Grundlagen der Elektrodynamik und der Transportphänomene für anisotrope Systeme
- Die Studierenden verstehen die mechanische Elastizität mit 3D-Belastung und Spannungszuständen und sind mit den Werkstoffgesetzen in der allgemeinen Form für isotrope und anisotrope Körper vertraut
- Die Studierenden verstehen den piezoelektrischen Effekt und seine Anwendungen in der Technik (Sensoren und Aktoren)

Modulinhalt mit Gewichtung der Lehrinhalte

- Wiederholung von isotropen Werkstoffgesetzen (Ohm, Hook, elektrische Polarisation, Wärmeleitung)
- Einführung in die Vektor- und Tensorberechnung: skalare, vektorielle und tensorielle Parameter, Tensoralgebra
- Transformationsverhalten von Vektoren und Tensoren
- Praktische Berechnung der Vektoranalyse und der Tensoralgebra: Elektrodynamik und anisotrope Phänomene

- Elastizitätstheorie mit Betonung auf 3D-Spannungszustände
- Piezoeffekt: physikalische Grundlagen

Woche	Thema
MW1	Einführung, Motivation, Wiederholung der grundlegenden physikalischen Gesetze aus der Technischen Physik
MW2	Skalare, Vektoren, Divergenz, Gradient, Quirl
MW3	Integraltheoreme und Anwendungen der Vektoranalyse in der Physik
MW4	Maxwell I: Elektro- und Magnetostatik
MW5	Maxwell II: Elektrodynamik
MW6	Maxwell III: Elektrodynamik
MW7	Grundlegende mathematische Eigenschaften von Tensoren, Transformation von Tensoren
MW8	Transportphänomene, Ohmsches Gesetz, Wärmeleitung und -verteilung
MW9	Elastizität: Spannungs- und Verzerrungstensor, thermische Ausdehnung
MW10	Elastizität: Hooksches Gesetz, Tensor des vierten Grades, technisches Diagramm
MW11	Elastizität: 3D-Spannungs- und Verzerrungszustände
MW12	Piezoelektrizität: Grundlagen
MW13	Piezoelektrizität, technische Anwendungen, Druckaufnehmer, Piezoaktoren
MW14	Technische Anwendungen mit 3D-Spannungs- und Verzerrungszuständen

Lehr- und Lernmethoden

- Frontalunterricht (ca. 60 %)
- Präsentation und Diskussion von Fallstudien und Problemen, individuelle Problemlösung (ca. 40 %)

Voraussetzungen, Vorkenntnisse, Eingangskompetenzen

- Physik, Analysis, lineare Algebra auf Bachelor-Stufe
- Die mathematischen Vorkenntnisse werden in den Kapiteln 7 - 9 von [4] behandelt. Die Zusammenfassungen dieser Kapitel befinden sich im Anhang dieses Dokuments.

Bibliografie

[1] R.E. Newham, Properties of Materials, Oxford, 2005
[2] J.F. Nye, *Physical Properties of Crystals*, Oxford Science Publication, 2004
[3] J.Tichy, *Fundamentals of Piezoelectric Sensorics,* Springer 2010
[4] E. Kreszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 10th edition, Wiley, 2011

Leistungsbewertung

Zulassungsbedingungen für die Modulschlussprüfung (Testatbedingungen)

-

Schriftliche Modulschlussprüfung

Prüfungsdauer : 120 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel: Persönliche Formelsammlung, Taschenrechner, Kursunterlagen

Anhang

SUMMARY OF CHAPTER 7

Linear Algebra: Matrices, Vectors, Determinants. Linear Systems

An $m \times n$ **matrix** $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ is a rectangular array of numbers or functions ("entries," "elements") arranged in m horizontal **rows** and n vertical **columns**. If $m = n$, the matrix is called **square**. A $1 \times n$ matrix is called a **row vector** and an $m \times 1$ matrix a **column vector** (Sec. 7.1).

The **sum** $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ of matrices of the same **size** (i.e., both $m \times n$) is obtained by adding corresponding entries. The **product** of $\mathbf{A}$ by a scalar c is obtained by multiplying each a_{jk} by c (Sec. 7.1).

The **product** $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ of an $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ by an $r \times p$ matrix $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ is defined only when $r = n$, and is the $m \times p$ matrix $\mathbf{C} = [c_{jk}]$ with entries

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk} \qquad \text{(row } j \text{ of } \mathbf{A} \text{ times column } k \text{ of } \mathbf{B}\text{).} \tag{1}$$

This multiplication is motivated by the composition of **linear transformations** (Secs. 7.2, 7.9). It is associative, but is ***not commutative:*** if $\mathbf{AB}$ is defined, $\mathbf{BA}$ may not be defined, but even if $\mathbf{BA}$ is defined, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ in general. Also $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ may not imply $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ or $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ or $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$ (Secs. 7.2, 7.8). Illustrations:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [11], \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

The **transpose** $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ of a matrix $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ is $\mathbf{A}^\mathsf{T} = [a_{kj}]$; rows become columns and conversely (Sec. 7.2). Here, $\mathbf{A}$ need not be square. If it is and $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\mathsf{T}$, then $\mathbf{A}$ is called **symmetric;** if $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\mathsf{T}$, it is called **skew-symmetric**. For a product, $(\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ (Sec. 7.2).

A main application of matrices concerns **linear systems of equations**

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad \text{(Sec. 7.3)} \tag{2}$$

(m equations in n unknowns $x_1, \cdots, x_n$; $\mathbf{A}$ and $\mathbf{b}$ given). The most important method of solution is the **Gauss elimination** (Sec. 7.3), which reduces the system to "triangular" form by *elementary row operations,* which leave the set of solutions unchanged. (Numeric aspects and variants, such as *Doolittle's* and *Cholesky's methods,* are discussed in Secs. 20.1 and 20.2.)

SUMMARY OF CHAPTER 8

Linear Algebra: Matrix Eigenvalue Problems

The practical importance of matrix eigenvalue problems can hardly be overrated. The problems are defined by the vector equation

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}. \tag{1}$$

A is a given square matrix. All matrices in this chapter are ***square***. λ is a scalar. To *solve* the problem (1) means to determine values of λ, called **eigenvalues** (or **characteristic values**) of **A**, such that (1) has a nontrivial solution **x** (that is, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), called an **eigenvector** of **A** corresponding to that λ. An $n \times n$ matrix has at least one and at most n numerically different eigenvalues. These are the solutions of the **characteristic equation** (Sec. 8.1)

$$D(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

$D(\lambda)$ is called the **characteristic determinant** of **A**. By expanding it we get the **characteristic polynomial** of **A**, which is of degree n in λ. Some typical applications are shown in Sec. 8.2.

Section 8.3 is devoted to eigenvalue problems for **symmetric** ($\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$), **skew-symmetric** ($\mathbf{A}^\mathsf{T} = -\mathbf{A}$), and **orthogonal matrices** ($\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^{-1}$). Section 8.4 concerns the diagonalization of matrices and the transformation of quadratic forms to principal axes and its relation to eigenvalues.

Section 8.5 extends Sec. 8.3 to the complex analogs of those real matrices, called **Hermitian** ($\overline{\mathbf{A}}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$), **skew-Hermitian** ($\overline{\mathbf{A}}^\mathsf{T} = -\mathbf{A}$), and **unitary matrices** ($\overline{\mathbf{A}}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^{-1}$). All the eigenvalues of a Hermitian matrix (and a symmetric one) are real. For a skew-Hermitian (and a skew-symmetric) matrix they are pure imaginary or zero. For a unitary (and an orthogonal) matrix they have absolute value 1.

The vector product is suggested, for instance, by moments of forces or by rotations. CAUTION! This multiplication is *anti*commutative, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, and is *not* associative.

An (oblique) box with edges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ has volume equal to the absolute value of the **scalar triple product**

$$(7) \qquad (\mathbf{a}\quad \mathbf{b}\quad \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Sections 9.4–9.9 extend differential calculus to vector functions

$$\mathbf{v}(t) = [v_1(t), v_2(t), v_3(t)] = v_1(t)\mathbf{i} + v_2(t)\mathbf{j} + v_3(t)\mathbf{k}$$

and to vector functions of more than one variable (see below). The derivative of $\mathbf{v}(t)$ is

$$(8) \qquad \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = [v_1', v_2', v_3'] = v_1'\mathbf{i} + v_2'\mathbf{j} + v_3'\mathbf{k}.$$

Differentiation rules are as in calculus. They imply (Sec. 9.4)

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}', \qquad (\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'.$$

Curves C in space represented by the position vector $\mathbf{r}(t)$ have $\mathbf{r}'(t)$ as a **tangent vector** (the **velocity** in mechanics when t is time), $\mathbf{r}'(s)$ (s arc length, Sec. 9.5) as the *unit tangent vector,* and $|\mathbf{r}''(s)| = \kappa$ as the *curvature* (the *acceleration* in mechanics).

Vector functions $\mathbf{v}(x, y, z) = [v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z)]$ represent vector fields in space. Partial derivatives with respect to the Cartesian coordinates x, y, z are obtained componentwise, for instance,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x}, \frac{\partial v_3}{\partial x}\right] = \frac{\partial v_1}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial v_3}{\partial x}\mathbf{k} \qquad \text{(Sec. 9.6).}$$

The **gradient** of a scalar function f is

$$(9) \qquad \operatorname{grad} f = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] \qquad \text{(Sec. 9.7).}$$

The **directional derivative** of f in the direction of a vector $\mathbf{a}$ is

$$(10) \qquad D_{\mathbf{a}} f = \frac{df}{ds} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} \cdot \nabla f \qquad \text{(Sec. 9.7).}$$

The **divergence** of a vector function $\mathbf{v}$ is

$$(11) \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}. \qquad \text{(Sec. 9.8).}$$

SUMMARY OF CHAPTER 9

Vector Differential Calculus. Grad, Div, Curl

All vectors of the form $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ constitute the **real vector space** R^3 with componentwise vector addition

(1) $$[a_1, a_2, a_3] + [b_1, b_2, b_3] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]$$

and componentwise scalar multiplication (c a scalar, a real number)

(2) $$c[a_1, a_2, a_3] = [ca_1, ca_2, ca_3] \qquad \text{(Sec. 9.1).}$$

For instance, the *resultant* of forces $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ is the sum $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

The **inner product** or **dot product** of two vectors is defined by

(3) $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\gamma = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad \text{(Sec. 9.2)}$$

where γ is the angle between $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$. This gives for the **norm** or **length** $|\mathbf{a}|$ of $\mathbf{a}$

(4) $$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

as well as a formula for γ. If $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, we call $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ **orthogonal**. The dot product is suggested by the *work* $W = \mathbf{p} \cdot \mathbf{d}$ done by a force $\mathbf{p}$ in a displacement $\mathbf{d}$.

The **vector product** or **cross product** $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ is a vector of length

(5) $$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\gamma \qquad \text{(Sec. 9.3)}$$

and perpendicular to both $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ such that $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{v}$ form a *right-handed* triple. In terms of components with respect to right-handed coordinates,

(6) $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(Sec. 9.3).}$$